Kwantummechanica 2

Tussentoets 4 Juni 2009

⋄ *Schrijf je naam en studentennummer op elk tentamenblad.*
⋄ *Het tentamen heeft 5 opdrachten.*
⋄ *Lees de opdrachten nauwkeurig en geef volledige antwoorden.*

Probleem 1

a) Een systeem bestaat uit drie deeltjes met impuls moment 2, 5 en 1. Wat zijn de mogelijke waardes voor het totale impuls moment?

Antwoord: $l \in \{5-(1+2)=2,3,4,5,6,7,5+2+1=8\}$

b) Bereken $\left[\hat{J}_+, \hat{J}_-\right]$

Antwoord: $2\hbar\hat{J}_z$

c) Bereken $\left[\hat{L}_x, \hat{r}^2\right]$

Antwoord: 0

d) Bereken $\left[\hat{L}_x\hat{L}_y, \hat{L}_z\right]$

Antwoord: $i\hbar\left(\hat{L}_x^{\,2} - \hat{L}_y^{\,2}\right)$

Probleem 2

De toestand van een deeltje met massa m wordt beschreven door de volgende golffunctie

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta\right)\, g(r),$$

met

$$\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1$$

en $\tau = (r, \theta, \phi)$.

a) Geef de mogelijke waardes met de bijbehorende waarschijnlijkheden die een meeting van L_z kan geven.

Antwoord: Rewriting the function as $\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}(Y_1^0 - \sqrt{2}Y_1^1)g(r)$, it easy to find that the possible values of L_z are $+\hbar$ and 0. Supposing that the radial part $g(r)$ is normalized, the whole function is normalized. Thus, the probability to measure the values of L_z is $P(L_z = \hbar) = 2/3$ and $P(L_z = 0) = 1/3$

b) Geef de verwachtingswaarde $< L_z >$ in de toestand $\psi(\tau)$.

Antwoord: $< L_z >= 2\hbar/3$

Hint:

$$Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$

Probleem 3

De eigenfunctie voor de grondtoestand van het waterstof atoom heeft de volgende vorm:

$$\psi_1(r) = N_1 \exp(-r/a_0),$$

met a_0 de Bohrse straal, N_1 een constante en r de afstand tussen het electron en de kern.

a) Vindt, door normalisatie van de golffunctie, de waarde van N_1.
Opmerking:

$$\int_0^\infty dr\ r^m \exp(-xr) = m!x^{-m-1}.$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}},$$

do not forget: $d\Omega = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$

b) De eigenfunctie van een aangeslagen toestand heeft de volgende vorm:

$$\psi_2(r) = N_2(1 + \lambda r)\exp(-r/2a_0).$$

Bepaal, gebruikmakend van orthogonaliteit van de golffuncties ψ_1 en ψ_2, de waarde van de constante λ

c) Schets de vorm van de golffunctie ψ_2.

$$\lambda = -1/2a_0$$

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\frac{2}{(2a_0)^{3/2}}(1 - r/2a_0)e^{-r/2a_0}$$

Probleem 4

De Hamilton operator voor een rotor (traagheidsmoment I) in een magnetisch veld ($B > 0$) word gegeven door

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \mu B \hat{L}_z$$

Stel het magnetisch veld gelijk aan $B = 3\hbar/(\mu I)$

a) Vindt de grondtoestand(en).

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\left(\hat{L}^2 + 6\hbar\hat{L}_z\right)$$

$$E_{l,m} = \frac{\hbar^2}{2I}\left(l(l+1) + 6m\right)$$

Minimaliseren: in ieder geval m=-l

$$E_{l,-l} = \frac{\hbar^2}{2I}\left(l(l+1) - 6l\right) = \frac{\hbar^2}{2I} l\left(l-5\right)$$

Dit minimaliseren levert $l = 2.5$. Dat is natuurlijk niet mogelijk, moet 2 of 3 zijn, of beide. In dit geval beide, er zijn dus twee gedegenereerde grondtoestanden met energie.

$$E_{2,-2} = E_{3,-3} = -6\frac{\hbar^2}{2I}$$

b) Als op $t = 0$ de rotor zich in toestand $(|1,-1\rangle - |1,1\rangle)/\sqrt{2}$ bevindt, wat is zijn dan de mogelijke waarden die een meting van $\hat{L}_x$ op een later tijdstip t_1 kan opleveren. Met welke waarschijnlijkheden?

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar}(|1,-1\rangle - |1,1\rangle)/\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{\hbar}{2I}(2-6)t}|1,-1\rangle - e^{-\frac{\hbar}{2I}(2+6)t}|1,1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\hbar}{I}t}\left(e^{3\frac{\hbar}{I}t}|1,-1\rangle - e^{-3\frac{\hbar}{I}t}|1,1\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Nu moeten we naar een basis met $\hat{L}_x$ eigenfuncties overgaan (zie opmerking onder), verder laten we de overall fase factor weg (doet niets voor de waarschijnlijkheden).

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{3\frac{\hbar}{I}t}\left(|1,-1\rangle_x - \sqrt{2}|1,0\rangle_x + |1,1\rangle_x\right)\right. \\
&\quad \left. -e^{-3\frac{\hbar}{I}t}\left(|1,-1\rangle_x + \sqrt{2}|1,0\rangle_x + |1,1\rangle_x\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2i\sin(3\hbar t/I)\left(|1,-1\rangle_x + |1,1\rangle_x\right) - 2\sqrt{2}\cos(3\hbar t/I)|1,0\rangle_x\right]
\end{aligned}
$$

De waarschijnlijkheden zijn dus

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{3\hbar}{I}t_1\right) &\quad \text{voor} \quad \langle\hat{L}_x\rangle = 1 \text{ of } -1 \\
\cos^2\left(\frac{3\hbar}{I}t_1\right) &\quad \text{voor} \quad \langle\hat{L}_x\rangle = 0
\end{aligned}
$$

c) Als het resultaat van de meting van $\hat{L}_x$ op t_1 gelijk is aan 0, wat zijn dan de mogelijke uitkomsten van een meting van $\hat{L}_z$ op een later tijdstip t_2. Met welke waarschijnlijkheden?

Toestand is $|1,0\rangle_x$, terug naar basis voor $\hat{L}_z$

$$
|\psi(t=t_1)\rangle = |1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)
$$

$\hat{L}_z$ commuteert met de Hamilton operator en is dus behouden, dus op alle tijdstippen $t_2 > t_1$ zijn de mogelijke uitkomsten van meting van $\hat{L}_z$ 1 of -1, met ieder een kans 1/2.

Opmerking: Expansie van enige eigenfuncties Y_l^m van $\hat{L}_z$ in eigenfuncties X_l^m van $\hat{L}_x$:

$$
Y_1^1 = \frac{1}{2}\left(X_1^{-1} + \sqrt{2}X_1^0 + X_1^1\right)
$$

$$
Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\left(X_1^{-1} - \sqrt{2}X_1^0 + X_1^1\right)
$$

Probleem 5

Een deeltje met massa m bevindt zich in een sferisch symmetrische potentiaal $U(r) = 0$ voor $r < r_0$, en $U(r) = U_0$ voor $r \geq r_0$.

a) Laat zien dat de energie eigenwaarde vergelijking voor het deeltje in de $l = 0$ toestand voor energies $E < U_0$ leidt tot

$$\sin kr_0 = \pm kr_0 \sqrt{\hbar^2/2mr_0^2 U_0},$$

met $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Maak hierbij gebruik van de definitie $\psi(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{r})/\mathbf{r}$.

We have to solve next problem:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\frac{\chi(r)}{r} + U(r)\frac{\chi(r)}{r} = E\frac{\chi(r)}{r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi''(r) = (E - U(r))\chi(r)$$

In the region $r < r_0$: $U(r) = 0$, therefore solution is: $\chi(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr)$, where $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. The wave function has form of $\psi(r) = \chi(r)/r = A\frac{\sin(kr)}{r} + B\frac{\cos(kr)}{r}$. From the condition $\lim_{r\to 0}\psi(r) < \infty$ we conclude that $B = 0$. So $\psi_1(r) = A\frac{\sin(kr)}{r}$. In the region $r > r_0$: $U(r) = U_0$, therefore solution is: $\chi(r) = C\exp(-k_1 r) + D\exp(k_1 r)$, where $k_1 = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$. The wave function has form of $\psi(r) = \chi(r)/r = C\frac{\exp(-k_1 r)}{r} + D\frac{\exp(k_1 r)}{r}$. From the condition $\lim_{r\to\infty}\psi(r) < \infty$ we conclude that $D = 0$. So $\psi_2(r) = C\frac{\exp(-k_1 r)}{r}$. FRom the condition $\psi_1(r_0) = \psi_2(r_0)$ and $\psi_1'(r_0) = \psi_2'(r_0)$ we derive:

$$A\frac{\sin(kr_0)}{r_0} = C\frac{\exp(-k_1 r_0)}{r_0}$$

$$A\left(k\frac{\cos(kr_0)}{r_0} - \frac{\sin(kr_0)}{r_0^2}\right) = C\left(-k_1\frac{\exp(-k_1 r_0)}{r_0} - \frac{\exp(-k_1 r_0)}{r_0^2}\right)$$

dividing second equation by the fist we obtain:

$$k\frac{\cos(kr_0)}{\sin(kr_0)} - \frac{1}{r_0} = -k_1 - \frac{1}{r_0}$$

therefore

$$\cot(kr_0) = -\frac{k_1}{k} = -\sqrt{\frac{U_0 - E}{E}}$$

. Using property $\sin^2(x) = \frac{1}{\cot^2 x + 1}$ we obtain

$$\sin^2(kr_0) = \frac{E}{U_0} = \left(kr_0\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mr_0^2 U_0}}\right)^2$$

b) Vindt de eerste waarde van $r_0^2 U_0$ die leidt tot een gebonden toestand.

Antwoord:We have to solve equation of the form of $\sin x = \pm x C$, where C is constant, keeping in mind that $\cot x$ should be negative. The smallest x at which we can obtain the solution is $\frac{\pi}{2}$. So $kr_0 = \frac{\pi}{2}$, therefore:

$$1 = \sin(kr_0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mr_0^2 U_0}}$$

. From this equation we find that

$$r_0^2 U_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m}$$